Mecánica Celeste

Observatorio Astronómico de Quito

Daniel Vera

Resumen

- Leyes de Newton
- Leyes de Kepler
- Propiedades de las órbitas
- Sistema de coordenadas
- Elementos de las órbitas
- Tipos de órbitas terrestres
- Maniobras orbitales

https://engineering.purdue.edu/AAE/Academics/Grad/ProgSummary

Leyes de Newton

- Primera ley del movimiento de Newton
  - Un cuerpo/objeto en estado de descanso o movimiento uniforme va a mantenerse en ese estado hasta experimentar una fuerza externa (F).
  - La fuerza neta que caracteriza esta ley es cero, por lo tanto la velocidad del objeto es constante

$$\Sigma \vec{F} = 0 = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

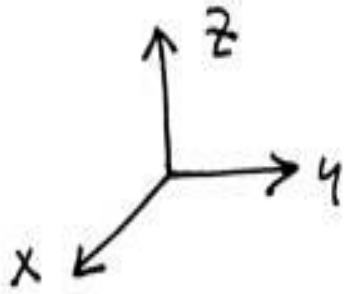
  - Momento de inercia
    - Resistencia de un cuerpo para cambiar su estado de movimiento

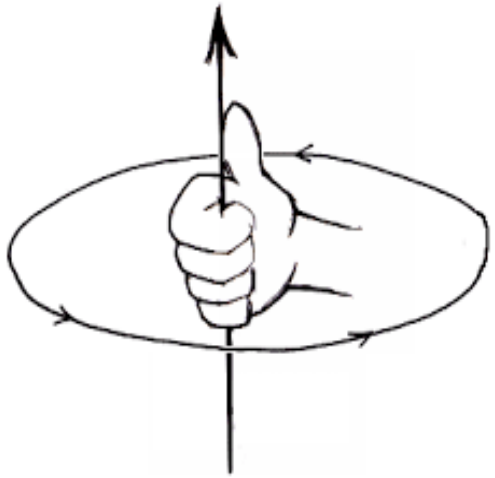
http://en.wikipedia.org/wiki/Later_life_of_Isaac_Newton

Leyes de Newton

- Primera ley del movimiento de Newton en la astrodinámica
  - Da origen de un plano de referencia (plano newtoniano)
  - Hay fuerzas externas actuando en masas en el espacio ya que no están en un estado uniforme
- Componente rotacional
  - Un objeto esta en estado de descanso o esta rotando sobre su eje de manera constante hasta que un torque externo actúe sobre el

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad , \quad \text{donde} \quad \vec{p} = m\vec{v}$$





http://labman.phys.utk.edu/phys222core/modules/m11/angular_momentum.htm

Leyes de Newton

- Segunda ley del movimiento de Newton
  - ¿Qué es la Fuerza?

$$\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

  - La aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza externa e inversamente proporcional a la masa del objeto
  - Nota: es común en la astrodinámica tratar con objetos que cambian su masa

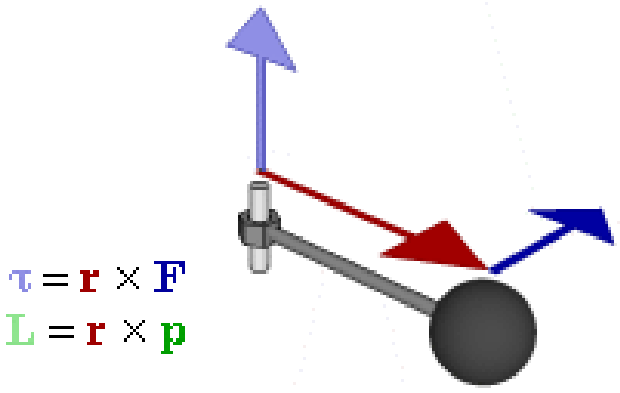
http://en.wikipedia.org/wiki/Later_life_of_Isaac_Newton

Leyes de Newton

- Segunda ley del movimiento de Newton en la astrodinámica
  - Existen 2 fuerzas externas que pueden actuar en un objeto
    - contacto directo
    - Fuerzas distantes generadas por masa
- Componente rotacional
  - El cambio de rotación (aceleración angular, $\vec{\alpha}$) de un objeto sobre su eje se debe a un torque externo e inversamente proporcional al momento de inercia.

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} \quad , \quad \vec{\tau} = (\vec{r})(\vec{F})$$

donde, $I = \int_m r^2 \, dm$



http://en.wikipedia.org/wiki/Angular_momentum

Leyes de Newton

- Tercera ley del movimiento de Newton
  - Conocida como la ley de acción y reacción

$$\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B}$$

- Tercera ley del movimiento de Newton en la astrodinámica
  - las Fuerzas siempre vienen en pares y que internamente se cancelan mutuamente
  - El principio de la conservación de momento.

$$\frac{d}{dt}(p_A + p_B) = 0$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Later_life_of_Isaac_Newton

Leyes de Newton

- Gravitación Universal
  - Es la fuerza entre dos masas M y m separados por una distancia (r)

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

donde, G es el constante gravitacional universal = $6.67 * 10^{-11}\, N * m^2 * kg^{-2}$

  - **Nota:** sistema de dos masas
- **Baricentro:** el centro de masa del sistema

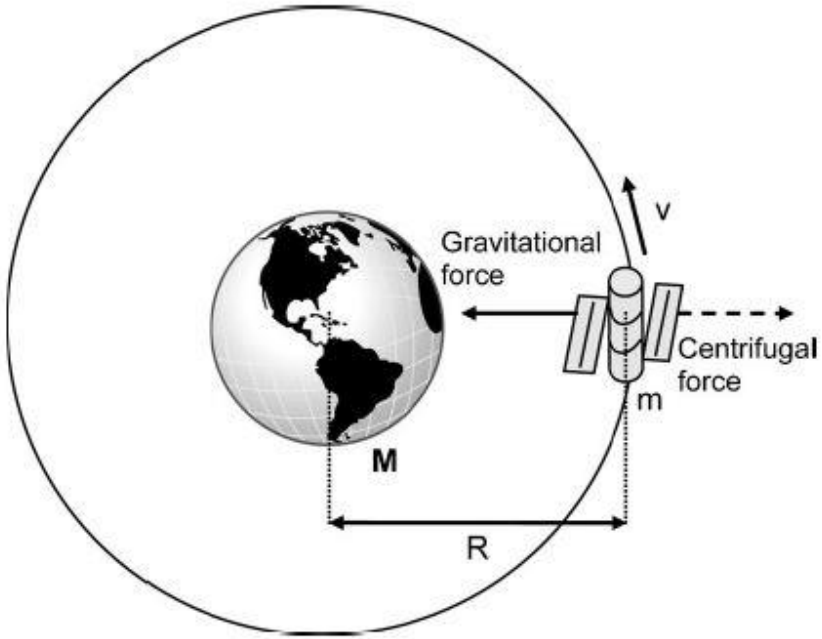
$$CM = \frac{\Sigma_i r_i m_i}{\Sigma_i m_i}$$

  - Cuando la masa de un objeto es mucho mayor que del otro objeto es factible utilizar el centro de masa de M como baricentro.

http://en.wikipedia.org/wiki/Later_life_of_Isaac_Newton

Leyes de Newton

- Gravitación Universal en la astrodinámica
  - El potencial gravitacional
    - pozos gravitacionales en tres dimensiones (por eso el signo negativo)
    - Satélites en órbita se puede decir que están dentro del potencial gravitacional



Leyes de Kepler

- Primera ley
  - Los planetas orbitan el sol en forma elíptica mientras el sol está en uno de los focos

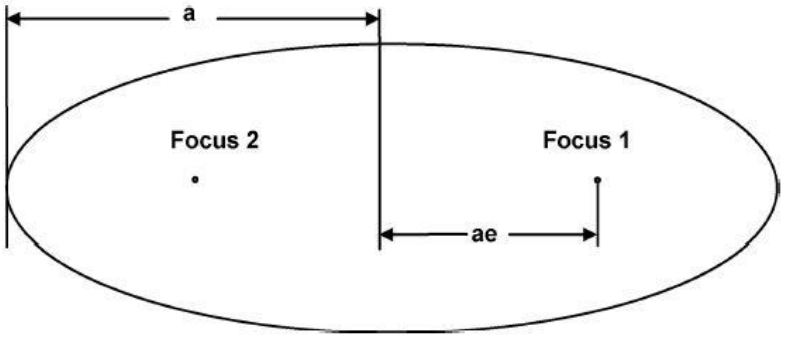
$$r = \frac{P}{1 + e\cos(\theta)}$$

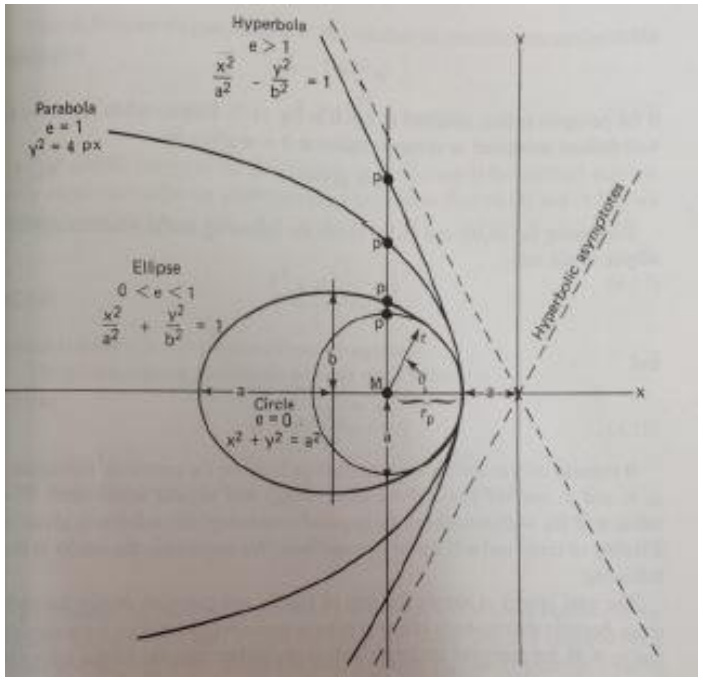
  - Energía cinética

$$E_k = \frac{1}{2}(mv^2)$$

  - Energía potencial

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$





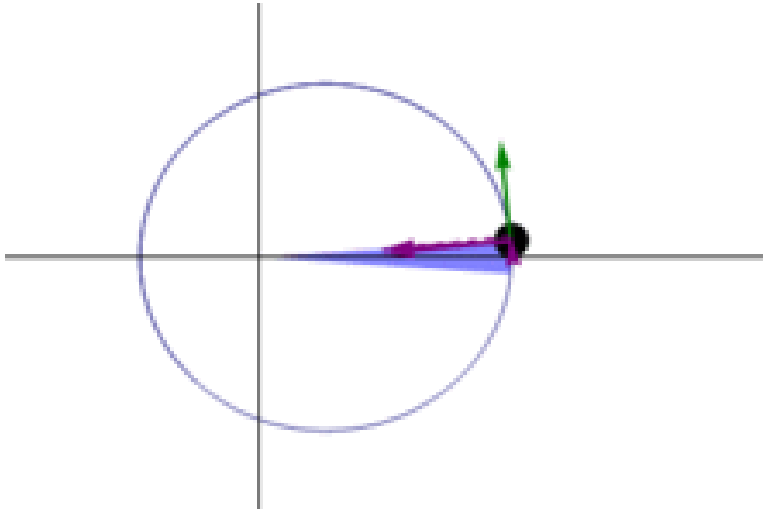
Leyes de Kepler

- Segunda ley
  - Conservación de momento angular
  - El momento angular es una constante
- Tercera Ley
  - El cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al sol y es una constante

$$P^2/a^3 = \text{Cte.}$$

  - Para una orbita circular:

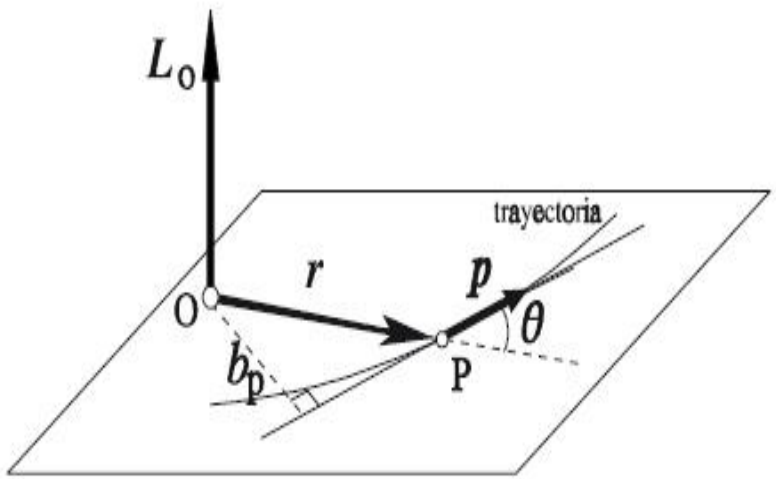
$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M} r^2$$

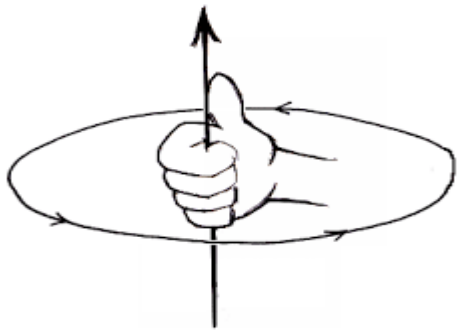


http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_laws_of_planetary_motion#/media/File:Kepler-second-law.gif

Leyes de Newton & Kepler

- ✓El centro de masa del sistema de dos cuerpos no tiene aceleración y por lo tanto sirve como origen de un plano de referencia inerte.
- ✓El momento angular del sistema es constante por lo tanto el movimiento está en un plano normal (perpendicular) al vector del momento angular
- ✓Las masas M y m siguen caminos cónicos en relación con el centro de masa (baricentro)



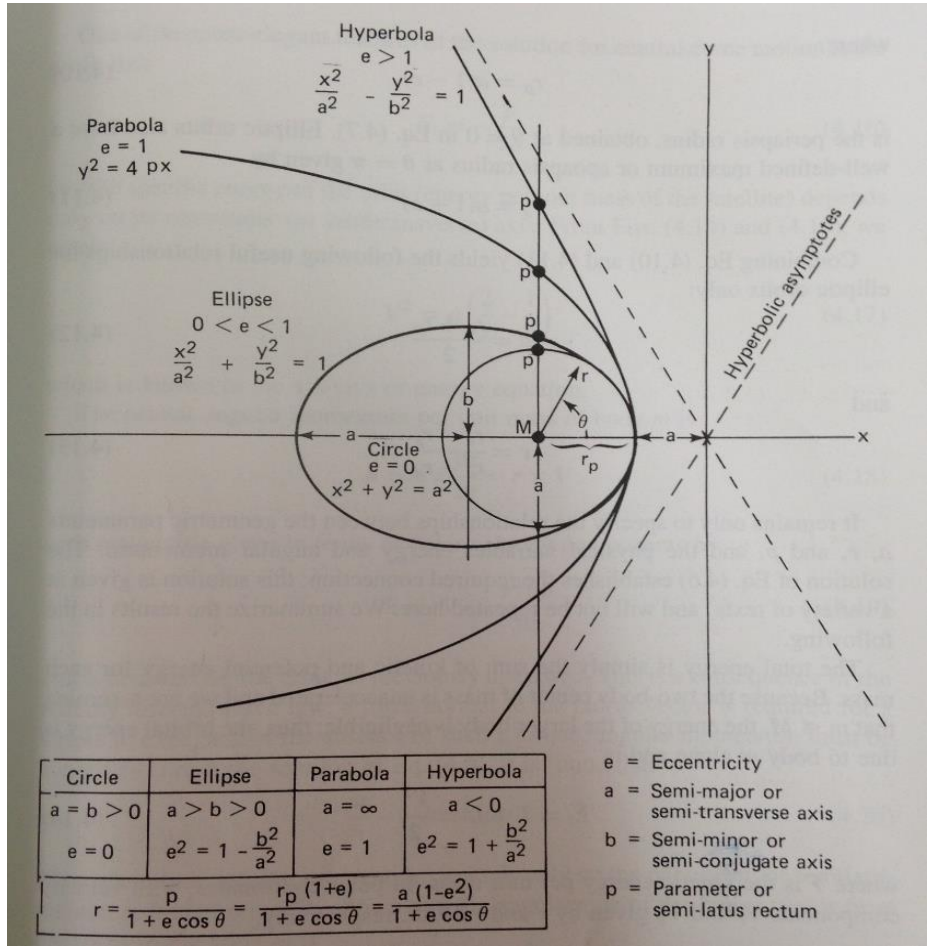


Propiedades de las órbitas

- Se utiliza un sistema de coordenadas polares (bidimensional, ángulo y distancia)
- La ecuación geométrica de estas orbitas es:

$$r = \frac{p}{1 + ecos(\theta)}$$

- La excentricidad, (e) define la forma de una geometría cónica
- θ es el ángulo medido desde "periapsis"
- "Periapsis" (θ=0): el punto más cercano entre el baricentro y m, también conocido como perigeo.
- "Apoapsis" ($\theta = \boldsymbol{\pi}$): es el punto mas lejano entre el baricentro y m, también conocido como apogeo



Propiedades de las órbitas

- Energía especifica de m (energía por unidad de masa)

$$E_t = E_k + Ep = \frac{v2}{2} - \frac{-\mu}{2a}$$

donde, (μ) es el parámetro gravitacional, que en el caso de elipses se lo puede expresar:

$$\mu = {}^{4\pi^2 a^3}/_{T^2} = GM$$

- Momento angular específico (energía por unidad de masa)

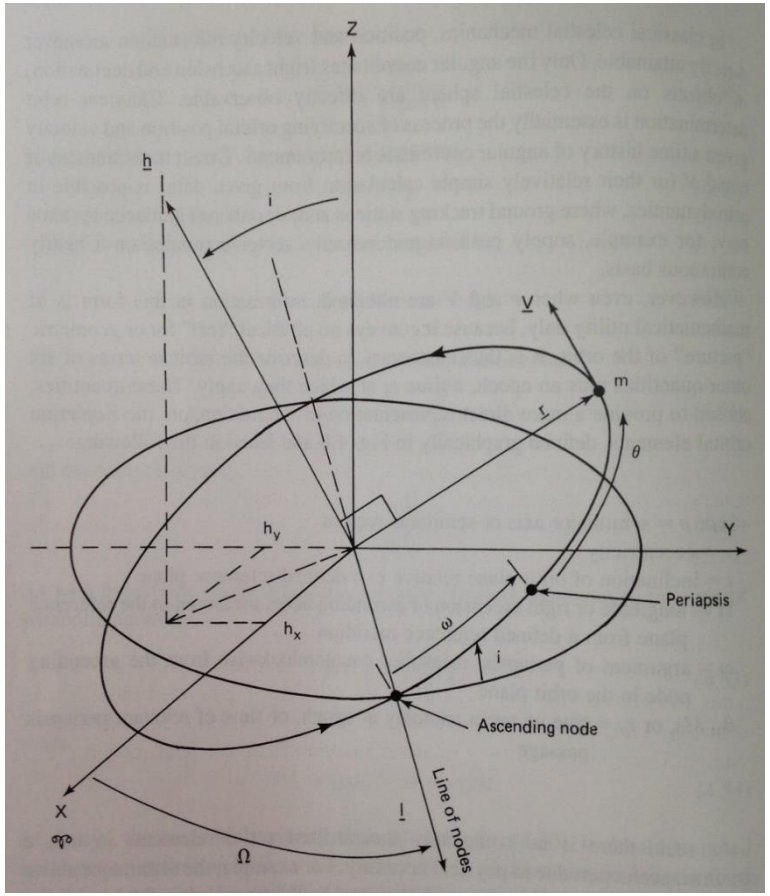
$$\vec{L}' = \vec{r} \text{ x } \vec{p}$$

- Se puede encontrar la excentricidad combinando la energía especifica y el momento angular especifico

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\, E_t\, L'^2}{\mu^2}}$$

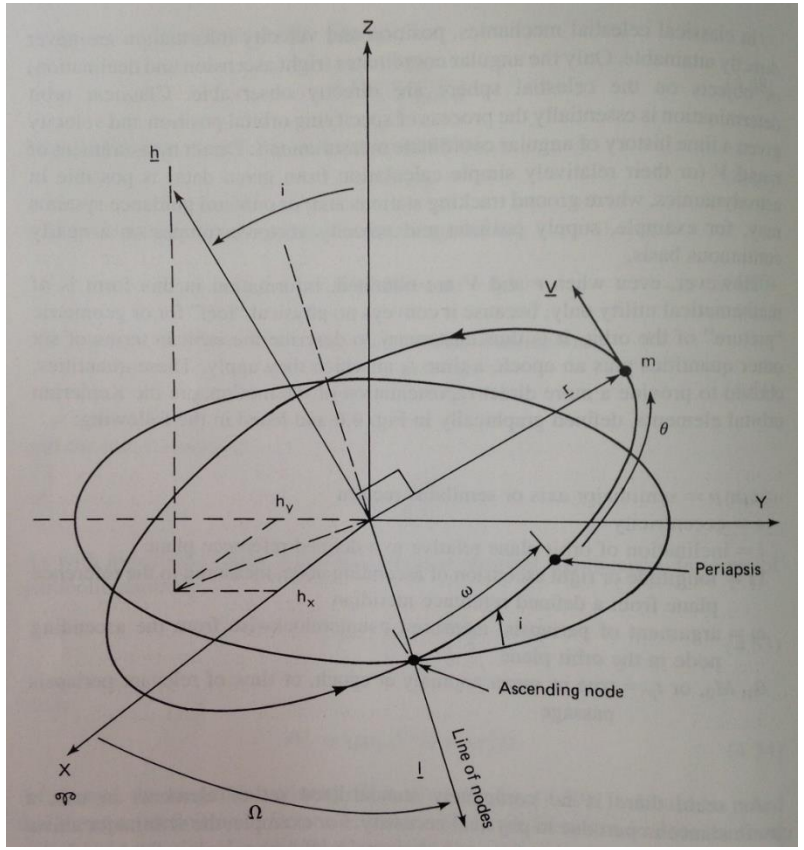
Sistema de coordenadas

- ECI: Earth Centered Inertial Coordinate System
- Sistema cartesiano para interpretar las tres dimensiones (X, Y, Z)
- El origen de este sistema de coordenadas es el plano inerte de Newton
- Se lo calcula usando el equinoccio vernal
  - X: equinoccio vernal; línea imaginaria de la línea ecuatorial al sol cuando los polos estén a la misma distancia del sol
  - Z: es perpendicular a X, va al norte
  - Y: se obtiene con la regla de la mano derecha, el lado positivo es la palma
- Cada orbita está en su propio plano.
  - Es mas fácil expresar la posición de la orbita a referencia del plano inerte usando coordenadas polares
  - Se trabaja con un mínimo de 2 planos para identificar la posición y dirección de un satélite.



Elementos (Keplereanos) de las órbitas

- a (Km) $=$ Eje semimayor (desde el centro de la Tierra, no es altura). El radio promedio de la Tierra es alrededor de 6370 km
- e (no unidades) $=$ Excentricidad
- i (grados) $=$ Inclinación del plano de la órbita en relación con el plano de referencia inerte (ECI)
- Ω (grados) $=$ Longitud de ascensión derecha del nodo ascendente. Medido en referencia a un meridiano determinado (ECI)
- w (grados) $=$ Argumento de periapsis. Medido al sentido opuesto del reloj desde el nodo ascendente hasta el punto de periapsis.
- θ (grados) $=$ Anomalía verdadera o tiempo de pasaje desde periapsis

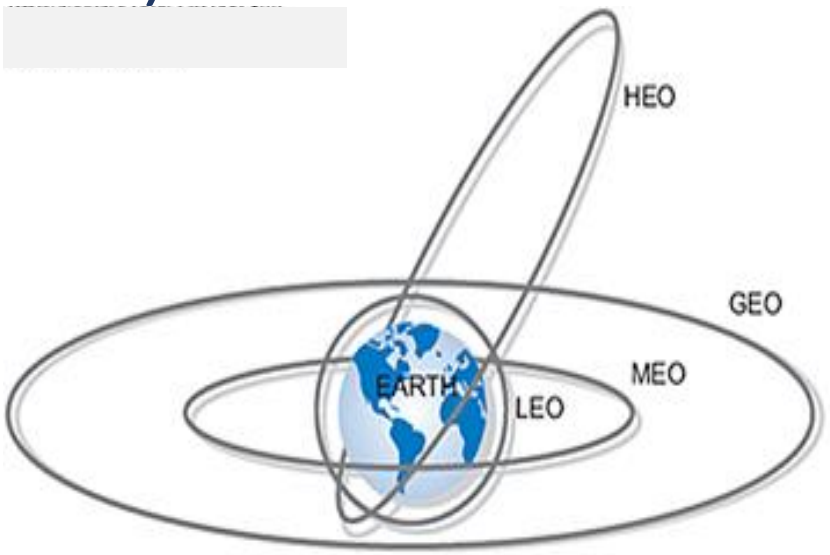


Elementos de las órbitas (Tiempo)

- El tiempo en el espacio sigue el concepto de tiempo-espacio de Einstein
  - El tiempo es relativo e influido por la gravedad, difícil de calcular.
- Para modelos simplificados de orbitas (distancias relativamente cortas) se puede utilizar el modelo de Newton sobre el tiempo
  - El tiempo se mueve hacia adelante en un plano inerte
  - Es un periodo en el que eventos físicos ocurren
- Epoch (Época): el punto de origen de un periodo de tiempo
  - Desde el primero de enero de 1958 se usa el tiempo atómico internacional (TAI),
  - Epoch del tiempo astronómico: medio día del 1ro de enero del año 4713 B.C como el año juliano 0
- Tiempo de Calendario o Universal: define un día como 24 horas
- Tiempo Sideral: 1 día = 23h 56m 4.09054s
- Tiempo efemérides: Tiempo universal corregido a tiempo sideral usando el epoch de TAI como punto de referencia normalmente medido con el calendario juliano
  - El efemérides: la información de los elementos keplereanos de orbitas y trayectorias de cuerpos celestes.

Tipos de órbitas terrestres (LEO: Low Earth Orbit)

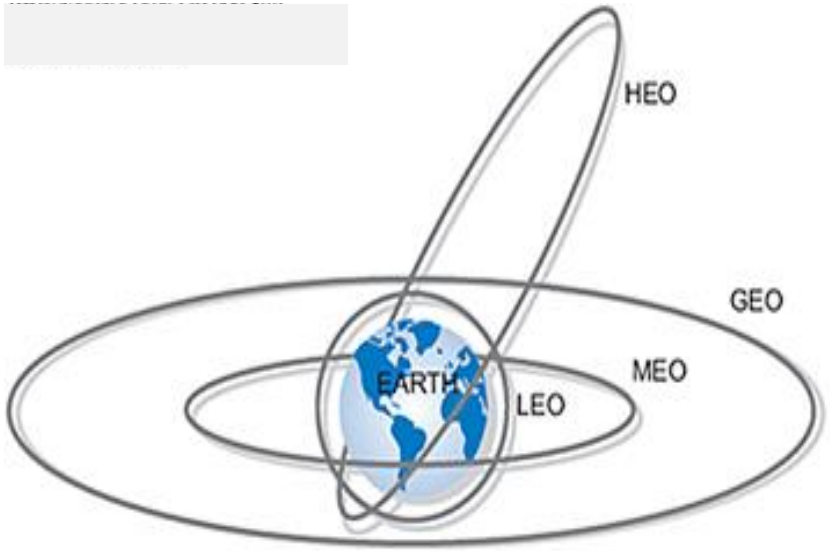
- Altura: 160 a 1500 km
  - La altura depende de los requisitos de la misión
  - 600 a 900 km es lo típico para monitoreo de la superficie
  - Altura funcional: +300 km
- Inclinación: 0(ecuatorial) a 90(polar) grados
- Periodo: 88 a 127 minutos
  - Periodo de rotación de la Tierra (T_E): 1436 minutos
- Hubble: (551 – 556 Km) (28 grados) (96 minutos)
- Usos Típicos:
  - Monitoreo de la superficie Terrestre
  - Satélites Meteorológicos
  - Demostradores de Tecnología
  - ISS



- Sun-Synchronous: Orbita especial que sincroniza su periodo a relación del punto de vista del sol.
  - Periodo: 96 a 100 minutos
  - Altura: 160 a 1000 Km
  - Inclinación: 96 a 104 grados

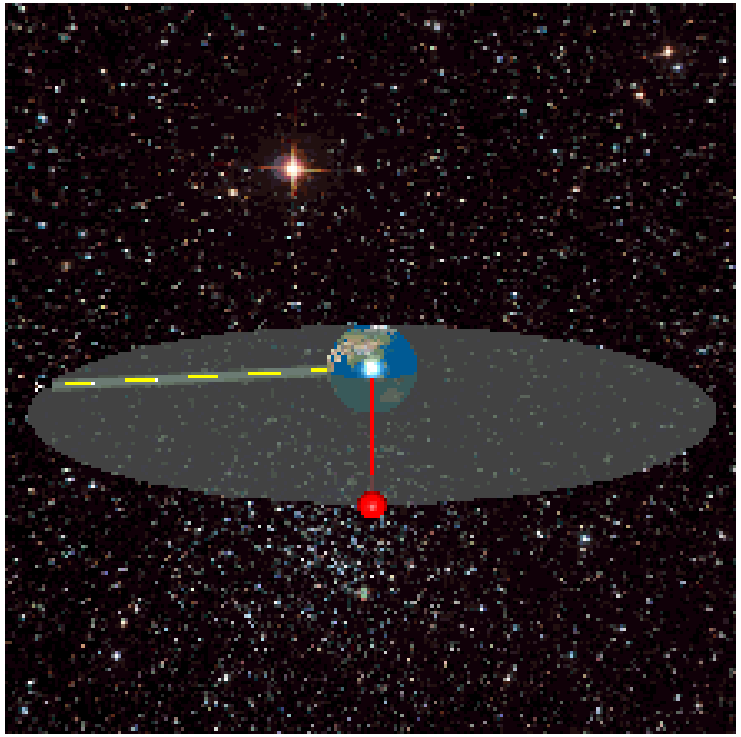
Tipos de órbitas terrestres (MEO: Medium Earth Orbit)

- Altura: 2000 a 35000 km
  - La altura depende de los requisitos de la misión
- Inclinación: 0 a 90 grados
- Periodo: 2 a 24 h
  - Periodo de rotación de la Tierra (T_E): 23h 56m 4.09054s
- GPS: (~2000 km) (51 – 56 grados) (12 h)
- Usos Típicos:
  - GPS (navegación)
  - Mapeo
  - comunicación
  - ciencia espacial



Tipos de órbitas terrestres (GSO: Geosynchronous Orbit)

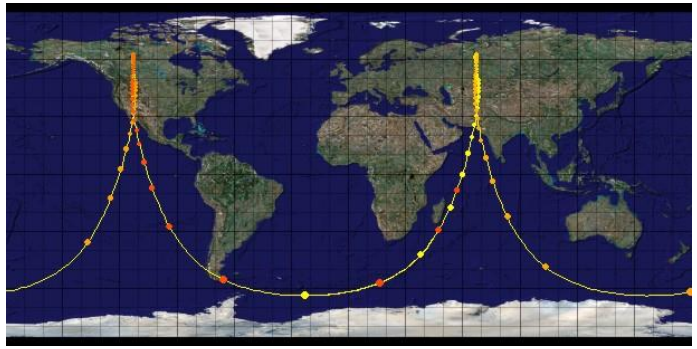
- Orbita que sincroniza su periodo con el periodo de la Tierra y gira en la misma dirección
  - Periodo: 23h 56m 4.09054s
  - Altura: 35786 Km
  - Inclinación: cerca de 0 grados
- Usos Típicos:
  - Satélites de comunicación
  - Meteorológicos (GOES)

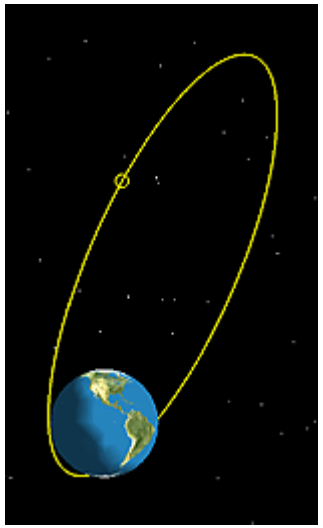


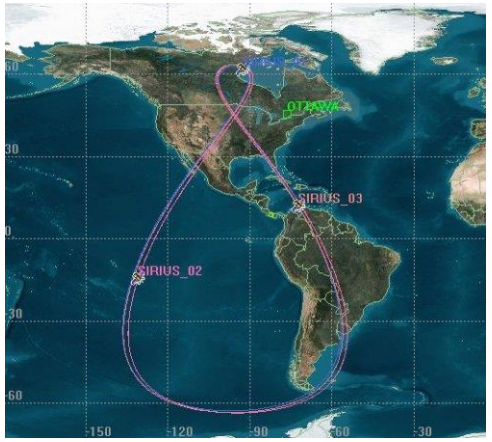
Tipos de órbitas terrestres (HEO: Hightly EllipticalOrbit)

- Orbita altamente elíptica con una excentricidad alta e inclinación calculada para que el apogeo siempre ocurra en una latitud determinada.
- Altura
  - Perigeo: Menos de 1000 km
  - Apogeo: Mas de 35786 Km
- Usos Típicos:
  - Se usa para satélites que requieren estar elaborando su misión en apogeo
  - Comunicación, vista a tierra, etc
- Molniya: Empleada por Rusia
  - Altura: Perigeo = 1000 km, apogeo = 39360 Km
  - Inclinación: 63.4 grados
  - Excentricidad: 0.722
  - Periodo: 12 horas
- Tundra: Derivada de la Molniya
  - Requiere más velocidad para ser adquirida
  - Inclinación: 63.4 grados
  - Excentricidad: 0.24

  Periodo: 23h 56m 4.09054s







Maniobras orbitales

- Se requiere propulsión para cambiar el momento del objeto
  - Impulso: una fuerza externa actuando en una masa por un tiempo determinado

$$I = \int_0^T F\, dt$$

  - Impulso especifico (por unidad de masa) (I_{sp})

$$I_{sp} = {}^{V_{ex}}/_{g}$$

donde, V_{ex}= Velocidad de salida del sistema de propulsión

- La fuerza generada por la propulsión es:

$$F = I_{sp}\, \dot{m}\, g$$

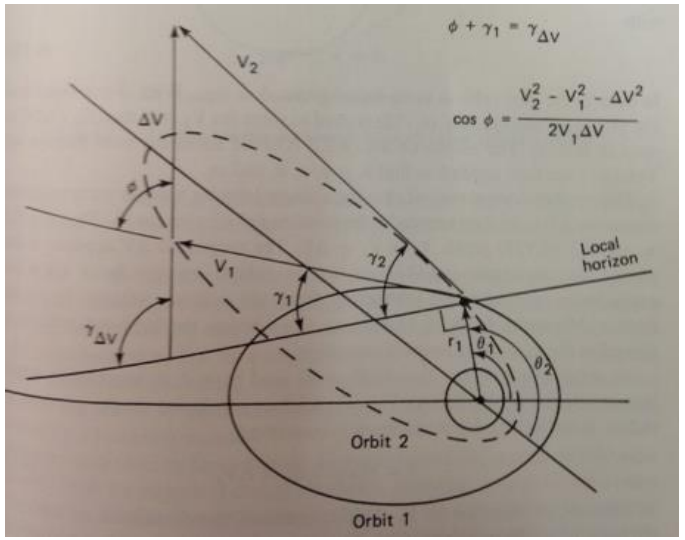
$\dot{m}$ = Flujo de la masa del sistema de propulsión

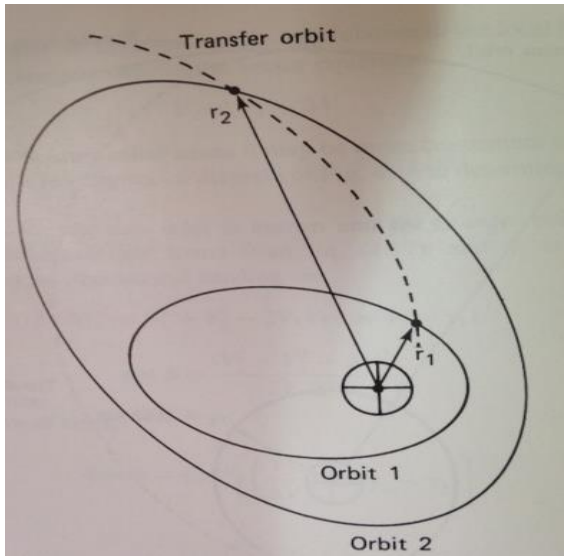
- Velocidad escape

$$V_e = \sqrt{{}^{2\mu}/_{r}}$$

Maniobras orbitales

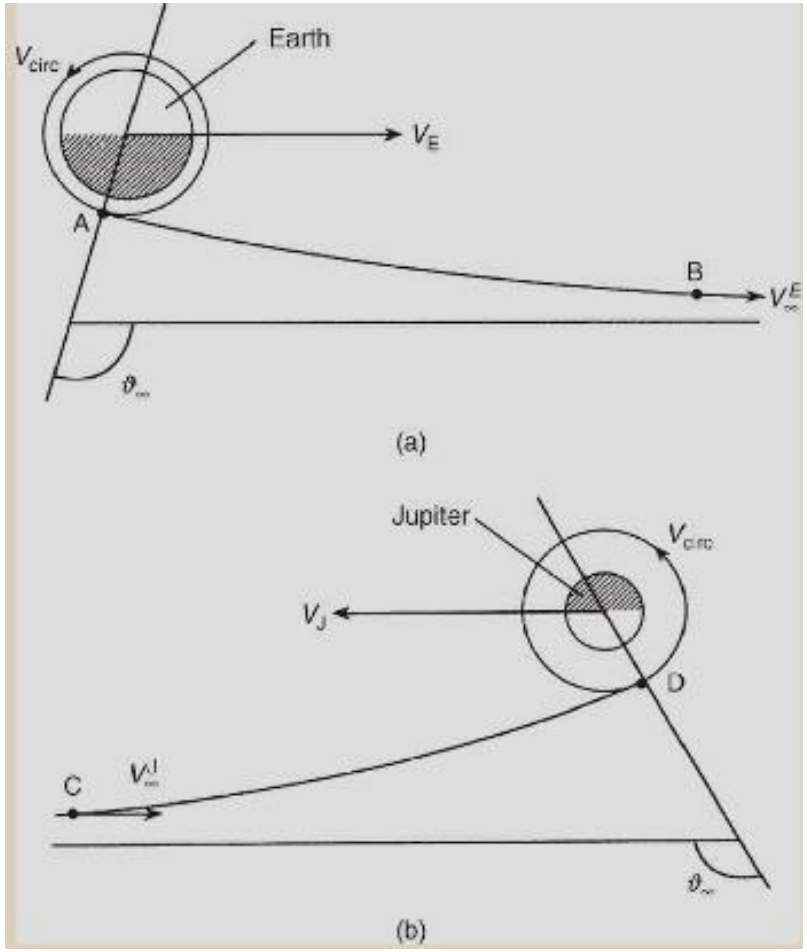
- Trayectoria de lanzamiento
  - Balística, cónica
  - Requisitos de la misión
- Rotación en el plano
  - Se requiere un cambio en la dirección de L pero no magnitud, por lo tanto se aplica torque en sentido perpendicular usando propulsión (impulso)
- Maniobra de un Impulso: Se usan cuando la orbita inicial y la final interceptan en un punto. La velocidad se cambia de forma instantánea en el punto de intersección (r1) a la velocidad de la nueva orbita
- Maniobra de dos Impulsos: Se usa cuando las orbitas no se interceptan. Se genera un impulso para alcanzar la orbita de transferencia y un segundo impulso para alcanzar la orbita final.





Maniobras orbitales (Interplanetarias)

- Es necesario planear para la optimización de la trayectoria
- Método de cónicas parcheadas
  - Punto de partida es una orbita heliocéntrica
  - La trayectoria es una orbita hiperbólica
  - Y la aproximación es también una orbita hiperbólica
- “Swing-by” o trayectorias asistidas
  - Es posible calcular la trayectoria hiperbólica para que la gravedad y la rotación de otros planetas ayuden a impulsar la nave.



Resumen

- Leyes de Newton
- Leyes de Kepler
- Propiedades de las órbitas
- Sistema de coordenadas
- Elementos de las órbitas
- Tipos de órbitas terrestres
- Maniobras orbitales